Teoretická část - 21.1.2021

1. (a) Definujte dělení intervalu, horní a dolní riemannovské součty a Riemannův integrál (3 body).

   (b) Zformulujte věty o nutné a postačující podmínce existence Riemannova intergálu a o spojitosti a Riemannově integrálu (2 body).

   (c) Větu o spojitosti a Riemannově integrálu dokažte (1 bod).

   (d) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      (i) existuje $f \in \mathfrak{R}([0,1])$, která je nespojitá v nekonečně mnoha bodech,

      (ii) existuje $f \in \mathfrak{R}([0,1])$, která není monotónní na žádném intervalu tvaru $[0,\delta]$, $0 < \delta < 1$.

   Vše řádně zdůvodněte (2 body).

2. (a) Definujte okolí bodu z rozšířené reálné osy a limitu funkce (včetně nevlastních limit) (2 body).

   (b) Zformulujte lemma o limitě a omezenosti a větu o aritmetice limit (2 body).

   (c) Dokažte část věty o aritmetice limit týkající se limity součinu (stačí pro vlastní limity) (1 body).

   (d) Nechť f, g a h jsou definovány na prstencovém okolí bodu -3. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      (i) nechť $\lim_{x\to -3}(f(x)+g(x)) = 0$, potom limity $\lim_{x\to -3} f(x)$ a $\lim_{x\to -3} g(x)$ existují a platí

$$\lim_{x\to -3} f(x) = -\lim_{x\to -3} g(x),$$

      (ii) nechť $\lim_{x\to -3}(f(x)+g(x)) = 0$ a g je spojitá v -3, potom limity $\lim_{x\to -3} f(x)$ a $\lim_{x\to -3} g(x)$ existují a platí

$$\lim_{x\to -3} f(x) = -\lim_{x\to -3} g(x).$$

      (iii) pokud

$$\lim_{x\to -3} \frac{f(x)}{h(x)} = 1, \quad \lim_{x\to -3} g(x) = 0,$$

      potom

$$\lim_{x\to -3} \frac{f(x)+g(x)}{h(x)} = 1$$

   Vše řádně zdůvodněte (3 body).

3. (a) Definujte číselnou posloupnost, limitu posloupnosti, vybranou posloupnost a omezenou posloupnost (4 body).

   (b) Zformulujte Bolzano-Weierstrassovu větu (1 bod).

   (c) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      (i) pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, potom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není omezená,

      (ii) pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, potom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená,

      (iii) pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje, potom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není omezená,

      (iv) pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje, potom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená,

      (v) má-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu, potom existuje $x \in \mathbb{R}$, že platí
      $$\forall\, \delta > 0\, \exists\, n \in \mathbb{N} : |a_n - x| < \delta$$

      (vi) je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená, potom existuje $x \in \mathbb{R}$, že platí
      $$\forall\, \delta > 0\, \exists\, n \in \mathbb{N} : |a_n - x| < \delta$$

   Vše řádně zdůvodněte (3 body).